

---

# REPRÉSENTATIONS BANALES DE $GL_m(D)$

*par*

Alberto Mínguez & Vincent Sécherre

---

**Abstract.** — Let  $F$  be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic  $p$ , let  $D$  be a finite dimensional central division  $F$ -algebra and let  $R$  be an algebraically closed field of characteristic different from  $p$ . We define *banal* irreducible  $R$ -representation of  $G = GL_m(D)$ . This notion involves a condition on the cuspidal support of the representation depending on the characteristic of  $R$ . When this characteristic is banal with respect to  $G$ , in particular when  $R$  is the field of complex numbers, any irreducible  $R$ -representation of  $G$  is banal. In this article, we give a classification of all banal irreducible  $R$ -representations of  $G$  in terms of certain multisegments, called banal. When  $R$  is the field of complex numbers, our method provides a new proof, entirely local, of Tadić's classification of irreducible complex smooth representations of  $G$ .

## 1. Introduction

Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle  $p$  et soit  $D$  une  $F$ -algèbre à division centrale de dimension finie dont le degré réduit est noté  $d$ . Pour tout entier  $m \geq 1$ , on désigne par  $G_m$  le groupe  $GL_m(D)$ , qui est une forme intérieure du groupe linéaire  $GL_{md}(F)$ . Les représentations lisses irréductibles complexes du groupe  $GL_{md}(F)$  ont été classées par Zelevinski [17] en termes de paramètres appelés *multisegments*. Dans [13], où la caractéristique de  $F$  est supposée nulle, Tadić donne une classification des représentations lisses irréductibles complexes de  $G_m$  en termes de multisegments. La méthode utilisée par Tadić s'appuie sur les résultats de [10] (qui reposent eux-mêmes sur la formule des traces simple) et en particulier sur la correspondance de Jacquet-Langlands et la classification des représentations tempérées en fonction de la série discrète (voir *ibid.*, théorème B.2.d). Dans [4], Badulescu étend ces deux résultats au cas

où  $F$  est de caractéristique  $p$ , et on trouve dans [3] la classification des représentations lisses irréductibles complexes de  $G_m$  sans restriction sur la caractéristique de  $F$ .

Dans cet article, on s'intéresse au problème de la classification des représentations lisses irréductibles de  $G_m$  à coefficients dans un corps  $R$  algébriquement clos de caractéristique  $\ell$  différente de  $p$ , appelées aussi représentations (lisses irréductibles) modulaires dans le cas où  $\ell$  est non nulle. Dans le cas modulaire, on ne dispose pas d'une formule des traces et le théorème du quotient de Langlands, qui permet dans la construction de Tadić d'obtenir toutes les représentations irréductibles en fonction des représentations tempérées, n'est pas valable. Il faut trouver une approche différente de celle employée dans le cas complexe.

Dans [11], nous avons effectué la classification complète des  $R$ -représentations irréductibles de  $G_m$  en termes de multisegments. C'est un long travail dont l'un des principaux outils est la théorie des types, et qui s'appuie sur des résultats profonds de [1, 7] sur les représentations des algèbres de Hecke affines de type  $A$  en une racine de l'unité.

Dans cet article, nous proposons une classification, *indépendante de celle obtenue dans [11] et ne s'appuyant pas sur [1, 7]*, de certaines  $R$ -représentations irréductibles de  $G_m$  que nous appelons *banales*. Une représentation irréductible de  $G_m$  est banale si son support cuspidal satisfait à une condition technique qui dépend de la caractéristique de  $R$  (voir plus bas pour une définition précise). Si cette caractéristique  $\ell$  est banale, c'est-à-dire si  $\ell$  est différent de  $p$  et ne divise aucun des entiers  $q^{di} - 1$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , où  $q$  désigne le cardinal du corps résiduel de  $F$ , alors toute  $R$ -représentation irréductible de  $G_m$  est banale. Ceci se produit en particulier si  $R$  est le corps des nombres complexes : dans ce cas, notre article fournit une nouvelle preuve de la classification de Tadić, indépendante de la caractéristique de  $F$  et purement locale : on n'utilise ni la formule des traces, ni la correspondance de Jacquet-Langlands.

Nous avons choisi de publier la classification des représentations banales indépendamment de la classification complète de [11], d'une part parce que l'approche employée dans [11] se simplifie de façon remarquable dans le cas banal (en particulier nous n'avons pas besoin ici des résultats profonds de [1, 7]), d'autre part pour insister sur le fait que notre approche fournit une preuve purement locale de la classification de Tadić.

L'une des principales difficultés auxquelles on est confronté lorsqu'on étudie les représentations modulaires de  $G_m$  est l'apparition de représentations cuspidales non supercuspidales (voir [14]). C'est ce qu'on évite ici en se restreignant aux représentations banales : une représentation irréductible banale est cuspidale si et seulement si elle est supercuspidale. Aussi certaines techniques algébriques de la théorie des représentations complexes employées par Zelevinski s'étendent-elles au cas banal. On obtient une double classification (à la Zelevinski et à la Langlands) plus précise que celle de [11] (qui ne donne qu'une classification à la Zelevinski) et la preuve en est beaucoup plus simple.

Il est temps déjà de donner plus de détails sur le contenu de cet article. Etant donnée une représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G_m$ , on lui associe dans [11, §7.1] un caractère non ramifié  $\nu_\rho$  tel que, pour toute représentation cuspidale  $\rho'$  de  $G_{m'}$ ,  $m' \geq 1$ , l'induite parabolique normalisée  $\rho \times \rho'$  soit réductible si et seulement si  $\rho'$  est isomorphe à  $\rho\nu_\rho$  ou à  $\rho\nu_\rho^{-1}$ . Par exemple, si  $D$  est égale à  $F$ , le caractère  $\nu_\rho$  est indépendant de  $\rho$  et est égal à  $|\det|_F$ , où  $|\cdot|_F$  désigne la valeur absolue normalisée de  $F$ . On note  $\mathbf{Z}_\rho$  l'ensemble des classes d'isomorphisme des  $\rho\nu_\rho^i$  pour  $i \in \mathbf{Z}$ . Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$(\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b)$$

où  $a, b$  sont des entiers tels que  $a \leq b$ . Un tel segment est noté  $[a, b]_\rho$ . On a une notion naturelle d'équivalence entre segments, et on définit un *multisegment* comme une somme formelle de classes d'équivalence de segments, c'est-à-dire un élément du groupe abélien libre engendré par les classes d'équivalence de segments. Le *support* d'un segment  $[a, b]_\rho$  est la somme formelle des classes d'isomorphisme des  $\rho\nu_\rho^i$  pour  $a \leq i \leq b$ , somme qui ne dépend que de la classe de ce segment, et le support d'un multisegment est la somme des supports des segments qui le composent.

**Définition 1.1.** — (1) Une somme formelle  $\rho_1 + \dots + \rho_r$  de classes de représentations irréductibles cuspidales est dite *banale* si, pour toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$ , il existe un élément de  $\mathbf{Z}_\rho$  qui n'apparaît pas dans cette somme.

(2) Un multisegment est dit *banal* si son support est banal ; une représentation irréductible est dite *banale* si son support cuspidal est banal.

La propriété suivante, prouvée dans [11, §8.2], justifie l'importance des représentations banales.

**Proposition 1.2.** — Soient  $\rho_1, \dots, \rho_r$  des représentations cuspidales, avec  $r \geq 2$ . Supposons que la somme formelle  $\rho_1 + \dots + \rho_r$  soit banale. Alors l'induite parabolique :

$$\rho_1 \times \dots \times \rho_r$$

ne contient aucun sous-quotient irréductible cuspidal.

On définit dans [11, §8.3] le support supercuspidal d'une représentation irréductible de  $G_m$ . On montre que le support supercuspidal d'une représentation banale est égal à son support cuspidal.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes de classification contenus dans cet article. Soit  $\Delta = [a, b]_\rho$  un segment banal. Alors la représentation induite :

$$\rho\nu_\rho^a \times \dots \times \rho\nu_\rho^b$$

possède une unique sous-représentation irréductible, notée  $Z(\Delta)$ , et un unique quotient irréductible, noté  $L(\Delta)$  (voir la proposition 4.10). Le résultat principal de cet article est le double théorème de classification suivant.

**Théorème 1.3.** — (1) Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments tels que, pour tous  $i < j$ , le segment  $\Delta_i$  ne précède pas  $\Delta_j$  et tels que le multisegment  $\mathbf{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$  soit banal. Alors :

$$(1.1) \quad Z(\Delta_1) \times \dots \times Z(\Delta_r)$$

admet une unique sous-représentation irréductible, ne dépendant que de  $\mathbf{m}$  et notée  $Z(\mathbf{m})$ . Elle est banale et sa multiplicité comme sous-quotient de (1.1) est égale à 1.

(2) L'application  $\mathbf{m} \mapsto Z(\mathbf{m})$  définit une bijection entre multisegments banals de degré  $n$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles banales de  $G_n$ .

**Théorème 1.4.** — (1) Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments tels que, pour tous  $i < j$ , le segment  $\Delta_i$  ne précède pas  $\Delta_j$  et tels que le multisegment  $\mathbf{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$  soit banal. Alors :

$$(1.2) \quad L(\Delta_1) \times \dots \times L(\Delta_r)$$

admet un unique quotient irréductible, ne dépendant que de  $\mathbf{m}$  et noté  $L(\mathbf{m})$ . Il est banal et sa multiplicité comme facteur de (1.2) est égale à 1.

(2) L'application  $\mathbf{m} \mapsto L(\mathbf{m})$  définit une bijection entre multisegments banals de degré  $n$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles banales de  $G_n$ .

La première classification est dite à la *Zelevinski* et la seconde à la *Langlands*. Pour prouver les parties (1) des théorèmes et l'injectivité des classifications, on adapte les idées du théorème du quotient de Langlands au cas modulaire. Remarquons que la condition de banalité nous permet d'ordonner tout multisegment banal de sorte que pour tous  $i < j$ , le segment  $\Delta_i$  ne précède pas  $\Delta_j$ . Pour prouver la surjectivité des classifications, on procède comme dans [17] : on utilise le fait que  $Z(\Delta) \times Z(\Delta')$  et  $L(\Delta) \times L(\Delta')$  sont de longueur 2 ou 1, selon que les segments  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont liés ou non (ce qui est faux si on n'impose pas la condition de banalité).

Supposons maintenant que  $R$  soit le corps des nombres complexes. Dans le cas où  $D$  est égale à  $F$ , notre preuve, purement combinatoire, est plus simple que celle de Zelevinski [17], qui utilise à plusieurs reprises des arguments de [6]. Notre preuve ne fait presque aucune différence entre les deux classifications. Dans le cas où  $D$  n'est pas commutative, le théorème 1.4 est prouvé dans [13] pour  $F$  de caractéristique nulle et dans [3] pour  $F$  de caractéristique  $p$ . Le théorème 1.3 est nouveau.

Pour finir, dans la section 6, on montre que toute  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible banale se relève en une  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation irréductible entière. En général, une  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation non banale ne peut pas toujours être relevée (voir [11, §9.7]).

### Remerciements

La majeure partie de ce travail a été effectuée alors que le second auteur était en poste à l'Université de la Méditerranée et à l'Institut de Mathématiques de Luminy. Le début de ce travail faisait partie de la thèse du premier auteur sous la direction de G. Henniart. Les auteurs le remercient pour son support constant et ses nombreuses suggestions.

### Notations et conventions

1. *Dans tout cet article*,  $F$  est un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle notée  $p$ , et  $R$  est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de  $p$ .

2. Une *F-algèbre à division* est une  $F$ -algèbre centrale de dimension finie dont l'anneau sous-jacent est un corps qui n'est pas nécessairement commutatif. Si  $K$  est une extension finie de  $F$ , ou plus généralement une algèbre à division sur une extension finie de  $F$ , on note  $\mathcal{O}_K$  son anneau d'entiers,  $\mathfrak{p}_K$  son idéal maximal et  $q_K$  le cardinal de son corps résiduel. On pose enfin  $q = q_F$ .

3. Une *R-représentation lisse* d'un groupe topologique  $G$  est un couple composé d'un  $R$ -espace vectoriel  $V$  et d'un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $\text{Aut}_R(V)$  tel que le stabilisateur de tout vecteur de  $V$  soit un sous-groupe ouvert de  $G$ . *Dans cet article, toutes les représentations sont supposées lisses.*

Un *R-caractère* de  $G$  est un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $R^\times$  de noyau ouvert. Si  $\pi$  est une  $R$ -représentation de  $G$ , on désigne par  $\pi^\vee$  sa contragrédiente. Si en outre  $\chi$  est un  $R$ -caractère de  $G$ , on note  $\chi\pi$  ou  $\pi\chi$  la représentation tordue  $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$ .

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que  $R$ -caractère et  $R$ -représentation.

4. Étant donné un ensemble  $X$ , on note  $\mathbf{Z}(X)$  le groupe abélien libre de base  $X$  constitué des applications de  $X$  dans  $\mathbf{Z}$  à support fini et  $\mathbf{N}(X)$  le sous-ensemble de  $\mathbf{Z}(X)$  constitué des applications à valeurs dans  $\mathbf{N}$ . Pour  $f, g \in \mathbf{Z}(X)$ , on note  $f \leq g$  si  $g - f \in \mathbf{N}(X)$ , ce qui définit une relation d'ordre partiel sur  $\mathbf{Z}(X)$ .

## 2. Préliminaires

Dans tout ce qui suit, on fixe une  $F$ -algèbre à division  $D$  de degré réduit noté  $d$ . Pour tout entier  $m \geq 1$ , on désigne par  $\mathcal{M}_m(D)$  la  $F$ -algèbre des matrices de taille  $m \times m$  à coefficients dans  $D$  et on pose  $G_m = \mathrm{GL}_m(D)$ . Il est commode de convenir que  $G_0$  est le groupe trivial.

**2.1.** Soit  $m \geq 1$ , et soit  $N_m$  la norme réduite de  $\mathcal{M}_m(D)$  sur  $F$ . On note  $|\cdot|_F$  la valeur absolue normalisée de  $F$ , c'est-à-dire la valeur absolue donnant à une uniformisante de  $F$  la valeur  $q^{-1}$ . Puisque l'image de  $q$  dans  $R$  est inversible, cette valeur absolue définit un  $R$ -caractère de  $F^\times$  noté  $|\cdot|_{F,R}$ . L'application  $g \mapsto |N_m(g)|_{F,R}$  est un  $R$ -caractère de  $G_m$ , qu'on notera simplement  $\nu$ .

**2.2.** Pour  $m \geq 0$ , on note  $\mathrm{Irr}_R(G_m)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $R$ -représentations irréductibles de  $G_m$  et  $\mathcal{G}_R(G_m)$  le groupe de Grothendieck de ses  $R$ -représentations de longueur finie, qui est un  $\mathbf{Z}$ -module libre de base  $\mathrm{Irr}_R(G_m)$ .

Si  $\pi$  est une  $R$ -représentation de longueur finie de  $G_m$ , on note  $\deg(\pi) = m$ , qu'on appelle le *degré* de  $\pi$ , et on note  $[\pi]$  son image dans  $\mathcal{G}_R(G_m)$ . En particulier, si  $\pi$  est irréductible,  $[\pi]$  désigne sa classe d'isomorphisme. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'identifier une  $R$ -représentation avec sa classe d'isomorphisme.

On désigne par  $\mathrm{Irr}_R$  la réunion disjointe des ensembles  $\mathrm{Irr}_R(G_m)$  pour  $m \geq 0$ , et par  $\mathcal{G}_R$  la somme directe des  $\mathcal{G}_R(G_m)$  pour  $m \geq 0$ , qui est un  $\mathbf{Z}$ -module libre de base  $\mathrm{Irr}_R$ .

**2.3.** Si  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  est une famille d'entiers positifs ou nuls dont la somme est égale à  $m$ , il lui correspond le sous-groupe de Levi standard  $M_\alpha$  de  $G_m$  constitué des matrices diagonales par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, que l'on identifie naturellement au produit  $G_{m_1} \times \dots \times G_{m_r}$ . On note  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique de  $G_m$  de facteur de Levi  $M_\alpha$  formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, et on note  $U_\alpha$  son radical unipotent.

On choisit une fois pour toutes une racine carrée de  $q$  dans  $R$ . On note  $\mathbf{r}_\alpha$  le foncteur de restriction parabolique normalisé relativement à ce choix, et  $\mathbf{i}_\alpha$  son adjoint à droite, c'est-à-dire le foncteur d'induction parabolique normalisé lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts, et préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie.

Si, pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on a une  $R$ -représentation  $\pi_i$  de  $G_{m_i}$ , on note :

$$(2.1) \quad \pi_1 \times \dots \times \pi_r = \mathbf{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r).$$

Si les  $\pi_i$  sont de longueur finie, la quantité  $[\pi_1 \times \dots \times \pi_r]$  ne dépend que de  $[\pi_1], \dots, [\pi_r]$ . L'application :

$$(2.2) \quad ([\pi_1], \dots, [\pi_r]) \mapsto [\pi_1 \times \dots \times \pi_r]$$

induit par linéarité une application linéaire de  $\mathcal{G}_R(G_{m_1}) \times \cdots \times \mathcal{G}_R(G_{m_r})$  dans  $\mathcal{G}_R(G_m)$ . Ceci munit  $\mathcal{G}_R$  d'une structure de  $\mathbf{Z}$ -algèbre commutative graduée (voir [17, 13, 3] dans le cas complexe et [9, 11] dans le cas modulaire).

On note également  $\mathbf{r}_\alpha^-$  le foncteur de restriction parabolique relativement au sous-groupe parabolique opposé à  $P_\alpha$  relativement à  $M_\alpha$ , c'est-à-dire formé des matrices triangulaires inférieures par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, et on note  $\alpha^- = (m_r, \dots, m_1)$  la famille déduite de  $\alpha$  en inversant l'ordre des termes.

**2.4.** Une R-représentation irréductible de  $G_m$  est dite *cuspidale* si son image par  $\mathbf{r}_\alpha$  est nulle pour toute famille  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  d'entiers compris entre 0 et  $m-1$  et de somme  $m$ . Elle est dite *supercuspidale* si en outre, pour toute R-représentation irréductible  $\pi_i$  de  $G_{m_i}$ , sa classe d'isomorphisme n'apparaît pas dans  $[\pi_1 \times \cdots \times \pi_r]$ .

On note  $\mathcal{C}_R(G_m)$  et  $\mathcal{S}_R(G_m)$  les sous-ensembles de  $\text{Irr}_R(G_m)$  constitués respectivement des classes d'isomorphisme de R-représentations irréductibles cuspidales et supercuspidales de  $G_m$ . On note  $\mathcal{C}_R$  et  $\mathcal{S}_R$  la réunion disjointe de  $\mathcal{C}_R(G_m)$  et  $\mathcal{S}_R(G_m)$  respectivement, pour  $m \geq 0$ .

**2.5.** Une *paire (super)cuspidale* de  $G_m$  est un couple  $(M, \varrho)$  formé d'un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G_m$  et d'une R-représentation irréductible (super)cuspidale  $\varrho$  de  $M$ . Si  $M = M_\alpha$  pour une famille  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  d'entiers positifs de somme  $m$ , alors  $\varrho$  est de la forme  $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ , où  $\rho_i$  est une R-représentation irréductible (super)cuspidale de  $G_{m_i}$ , pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Si  $\pi$  est une R-représentation irréductible de  $G_m$ , il existe une famille  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  et, pour chaque  $i$ , une R-représentation irréductible cuspidale (supercuspidale)  $\rho_i$  de  $G_{m_i}$  telles que  $\pi$  soit isomorphe à une sous-représentation (un sous-quotient) de la représentation induite  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ . La somme :

$$[\rho_1] + \cdots + [\rho_r]$$

dans  $\mathbf{N}(\mathcal{C}_R)$  (resp.  $\mathbf{N}(\mathcal{S}_R)$ ) est unique et s'appelle le support cuspidal (supercuspidal) de  $\pi$  et est notée  $\text{cusp}(\pi)$  (resp.  $\text{scusp}(\pi)$ ). Pour une preuve de l'unicité du support cuspidal (supercuspidal), on renvoie à [11].

**2.6.** Dans ce paragraphe, on donne une version combinatoire du lemme géométrique de Bernstein-Zelevinski (voir [11, §2.4.3]). Soient  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  et  $\beta = (n_1, \dots, n_s)$  deux familles d'entiers de sommes toutes deux égales à  $m \geq 1$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\pi_i$  une R-représentation irréductible de  $G_{m_i}$ , et posons  $\pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r \in \text{Irr}_R(M_\alpha)$ . On note  $\mathcal{M}^{\alpha, \beta}$  l'ensemble des matrices  $B = (b_{i,j})$  composées d'entiers positifs tels que :

$$\sum_{j=1}^s b_{i,j} = m_i, \quad \sum_{i=1}^r b_{i,j} = n_j, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \quad j \in \{1, \dots, s\}.$$



Fixons  $B \in \mathcal{M}^{\alpha, \beta}$  et notons  $\alpha_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,s})$  et  $\beta_j = (b_{1,j}, \dots, b_{r,j})$ , qui sont des partitions de  $m_i$  et de  $n_j$  respectivement. Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on écrit :

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \dots \otimes \sigma_{i,s}^{(k)}, \quad \sigma_{i,j}^{(k)} \in \text{Irr}_R(G_{b_{i,j}}), \quad k \in \{1, \dots, r_i\},$$

les différents facteurs de composition de  $\mathbf{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, s\}$  et toute famille d'entiers  $(k_1, \dots, k_r)$  tels que  $1 \leq k_i \leq r_i$ , on définit une R-représentation  $\sigma_j$  de  $G_{n_j}$  par :

$$\sigma_j = \mathbf{i}_{\beta_j} \left( \sigma_{1,j}^{(k_1)} \otimes \dots \otimes \sigma_{r,j}^{(k_r)} \right).$$

Alors les R-représentations :

$$\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_s, \quad B \in \mathcal{M}^{\alpha, \beta}, \quad 1 \leq k_i \leq r_i,$$

forment une suite de composition de  $\mathbf{r}_\beta(\mathbf{i}_\alpha(\pi))$ .

On reprend les notations ci-dessus avec  $s = 2$ . Le résultat suivant est prouvé dans [11, Proposition 2.8].

**Proposition 2.1.** — *On suppose que, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , toute partition  $\alpha_i$  de  $m_i$  et tout facteur de composition  $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \sigma_{i,2}^{(k)}$  de  $\mathbf{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$ , on ait :*

$$\text{cusp}(\sigma_{i,2}^{(k)}) \not\leq \sum_{i < j \leq r} \text{cusp}(\pi_j).$$

*Alors  $\pi$  apparaît avec multiplicité 1 dans  $[\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{i}_\alpha(\pi))]$ . Ainsi  $\mathbf{i}_\alpha(\pi)$  (resp.  $\mathbf{i}_{\alpha^-}(\pi)$ ) a une unique sous-représentation (resp. un unique quotient) irréductible, dont la multiplicité dans  $[\mathbf{i}_\alpha(\pi)]$  (resp.  $[\mathbf{i}_{\alpha^-}(\pi)]$ ) est égale à 1.*

### 3. La théorie des segments

On rappelle les notions de segment et de multisegment (voir [11, §§7.3 et 9.1]).

**3.1.** Soit  $m \geq 1$  un entier, et soit  $\rho$  une R-représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ . Dans [11, §7.1], on associe à  $\rho$  un R-caractère non ramifié  $\nu_\rho$  de  $G_m$  tel que, si  $\rho'$  est une R-représentation irréductible cuspidale de  $G_{m'}$  avec  $m' \geq 1$ , la représentation induite  $\rho \times \rho'$  soit réductible si et seulement si  $m' = m$  et si  $\rho'$  est isomorphe à  $\rho\nu_\rho$  ou à  $\rho\nu_\rho^{-1}$ . Ce caractère ne dépend que de la classe d'inertie de  $\rho$ . On pose :

$$(3.1) \quad \mathbf{Z}_\rho = \{[\rho\nu_\rho^i] \mid i \in \mathbf{Z}\}.$$

Dans le cas où R est de caractéristique non nulle, cet ensemble est fini et on note  $e(\rho)$  son cardinal. Si la caractéristique de R est nulle,  $\mathbf{Z}_\rho$  est un ensemble infini et on convient que  $e(\rho) = +\infty$ .



**3.2.** Soit un entier  $m \geq 1$ , soit  $\rho$  une  $\mathbf{R}$ -représentation irréductible cuspidale de  $\mathbf{G}_m$  et soient  $a, b \in \mathbf{Z}$  des entiers tels que  $a \leq b$ .

**Définition 3.1.** — Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$(3.2) \quad (\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b).$$

Une telle famille est notée  $[a, b]_\rho$ .

Si  $\Delta = [a, b]_\rho$  est un segment, on note :

$$(3.3) \quad n(\Delta) = b - a + 1, \quad \deg(\Delta) = (b - a + 1)m, \quad a(\Delta) = \rho\nu_\rho^a, \quad b(\Delta) = \rho\nu_\rho^b,$$

respectivement la longueur, le degré et les extrémités de  $\Delta$ . Si  $a + 1 \leq b$ , on pose :

$$(3.4) \quad {}^-\Delta = [a + 1, b]_\rho, \quad \Delta^- = [a, b - 1]_\rho.$$

Le *support* de  $\Delta$ , noté  $\mathrm{supp}(\Delta)$ , est l'élément de  $\mathbf{N}(\mathbb{C}_\mathbf{R})$  défini par :

$$(3.5) \quad \mathrm{supp}(\Delta) = [\rho\nu_\rho^a] + \dots + [\rho\nu_\rho^b].$$

On note enfin :

$$(3.6) \quad \Delta^\vee = [-b, -a]_{\rho^\vee}$$

le segment contragrédient de  $\Delta$ .

**Définition 3.2.** — Soient  $\Delta = [a, b]_\rho$  et  $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$  des segments.

(1) On dit que  $\Delta$  *précède*  $\Delta'$  si l'on peut extraire de la suite :

$$(\rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'})$$

une sous-suite qui soit un segment de longueur strictement supérieure à  $n(\Delta)$  et  $n(\Delta')$ .

(2) On dit que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont *liés* si  $\Delta$  précède  $\Delta'$  ou si  $\Delta'$  précède  $\Delta$ .

Remarquons que, si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont liés, les ensembles  $\mathbf{Z}_\rho$  et  $\mathbf{Z}_{\rho'}$  sont égaux.

**3.3.** Deux segments  $[a, b]_\rho$  et  $[a', b']_{\rho'}$  sont dits *équivalents* s'ils ont la même longueur et si  $\rho\nu_\rho^a$  est isomorphe à  $\rho'\nu_{\rho'}^{a'}$ . On note  $\mathrm{Seg}_\mathbf{R}$  l'ensemble des classes d'équivalence de segments.

**Définition 3.3.** — Un *multisegment* est un élément de  $\mathbf{N}(\mathrm{Seg}_\mathbf{R})$ . On note :

$$\mathrm{Mult} = \mathrm{Mult}_\mathbf{R}$$

l'ensemble des multisegments.

Soit  $\mathbf{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$  un multisegment. Les applications longueur, degré et support sont prolongées à Mult par additivité, c'est-à-dire qu'on note :

$$n(\mathbf{m}) = \sum_{1 \leq i \leq r} n(\Delta_i), \quad \deg(\mathbf{m}) = \sum_{1 \leq i \leq r} \deg(\Delta_i), \quad \text{supp}(\mathbf{m}) = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{supp}(\Delta_i),$$

la longueur, le degré et le support cuspidal de  $\mathbf{m}$  respectivement. Étant donné un support cuspidal  $\mathfrak{s} \in \mathbf{N}(\mathbb{C})$ , on note :

$$\text{Mult}(\mathfrak{s})$$

l'ensemble de tous les multisegments de support  $\mathfrak{s}$ .

On note  $\text{supp}^0(\mathbf{m})$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{C}_R$  apparaissant dans  $\text{supp}(\mathbf{m})$  avec multiplicité  $\geq 1$ . On dit que le support de  $\mathbf{m}$  est *connexe* s'il existe un segment  $\Delta$  tel que  $\text{supp}^0(\mathbf{m}) = \text{supp}^0(\Delta)$ . Dans ce cas on dit que  $\mathbf{m}$  est à support connexe.

#### 4. Les représentations banales

Dans cette section, on définit la notion de représentation banale et on donne quelques premières propriétés et exemples de telles représentations.

**4.1.** On commence par définir la notion de multisegment banal.

**Définition 4.1.** — Un multisegment  $\mathbf{m}$  est dit *banal* si, pour toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$ , il existe un élément de  $\mathbf{Z}_\rho$  n'apparaissant pas dans  $\text{supp}(\mathbf{m})$ .

Un segment  $[a, b]_\rho$  est banal si et seulement s'il est de longueur strictement inférieure à  $e(\rho)$ .

**Remarque 4.2.** — Notons que la somme de deux multisegments banals n'est pas toujours banale. Par exemple, supposons que l'image de  $q$  dans  $R^\times$  soit d'ordre 2. On note 1 le caractère trivial de  $\text{GL}_1(F)$  et  $\nu$  son unique caractère non ramifié d'ordre 2. Alors les segments  $[1]$  et  $[\nu]$  sont banals tandis que leur somme ne l'est pas.

Si  $\mathbf{m}$  est un multisegment banal, il existe des segments  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  tels que, pour  $i < j$ , le segment  $\Delta_i$  ne précède pas  $\Delta_j$  et tels que  $\mathbf{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$ . Une telle famille  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  s'appelle une *forme rangée* de  $\mathbf{m}$ . En général, un mutisegment non banal ne possède pas de forme rangée.

**4.2.** Soit  $m \geq 1$  un entier et soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$  telle que  $e(\rho) \geq 2$ . On fixe un entier  $0 \leq t \leq e(\rho) - 1$ .

**Définition 4.3.** — Soient  $\Delta = [a, b]_\rho$  et  $\Delta' = [a', b']_\rho$  deux segments vérifiant la condition  $0 \leq a, b, a', b' \leq t$ . On écrit :

$$\Delta > \Delta'$$

si  $a > a'$ , ou bien si  $a = a'$  et  $b > b'$ .

On écrit aussi  $\Delta \geq \Delta'$  si  $\Delta > \Delta'$  ou  $\Delta = \Delta'$ . La relation  $\geq$  est une relation d'ordre dépendant des choix de  $\rho$  et  $t$ .

**4.3.** Soit  $\mathfrak{s} \in \mathbf{N}(\mathbb{C})$  un support *connexe et banal*. On va prolonger l'ordre sur les segments en un ordre total sur  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$ . D'abord, il existe une représentation irréductible cuspidale  $\rho$  (unique à isomorphisme près) et un unique entier  $0 \leq t \leq e(\rho) - 1$  tels que :

$$\text{supp}(\mathfrak{s}) = [\rho] + [\rho\nu_\rho] + \cdots + [\rho\nu_\rho^t].$$

Comme  $\mathfrak{s}$  est banal, chaque terme de cette somme apparaît avec multiplicité 1, c'est-à-dire qu'on a  $\text{supp}^0(\mathfrak{s}) = \{[\rho], [\rho\nu_\rho], \dots, [\rho\nu_\rho^t]\}$ .

On appelle *forme ordonnée* d'un multisegment  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}(\mathfrak{s})$  l'unique famille :

$$(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

de segments tels que  $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$  et  $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \geq \Delta_r$ . Si le support  $\mathfrak{s}$  n'est pas banal ou n'est pas connexe, la forme ordonnée de  $\mathfrak{m}$  peut ne pas exister ou ne pas être unique.

On étend maintenant la relation  $\geq$  aux multisegments de support  $\mathfrak{s}$ .

**Définition 4.4.** — Soient  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{m}'$  des multisegments de support  $\mathfrak{s}$ , et soient  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  et  $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$  leurs formes ordonnées respectives. On écrit :

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{m}'$$

si l'on est dans l'un des cas suivants :

- (1) Il existe  $1 \leq i < \min(r, r')$  tel que  $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_i = \Delta'_i$  et  $\Delta_{i+1} > \Delta'_{i+1}$ .
- (2) On a  $r > r'$  et  $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_{r'} = \Delta'_{r'}$ .

On écrit aussi  $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}'$  si  $\mathfrak{m} > \mathfrak{m}'$  ou  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ . La relation  $\geq$  est une relation d'ordre sur  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$ .

**4.4.** Soit  $\mathfrak{s} = [\rho_1] + \cdots + [\rho_r]$  un élément de  $\mathbf{N}(\mathbb{C})$ . La propriété suivante, prouvée dans [11, §8.2], montre l'importance de la notion de représentation banale.

**Proposition 4.5.** — *Supposons que  $\mathfrak{s}$  soit banal et que  $r \geq 2$ . Alors la représentation :*

$$\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$$

*ne contient aucun sous-quotient irréductible cuspidal.*

Le résultat analogue dans le cas complexe est dû à [5].

**Définition 4.6.** — On dit qu'une représentation irréductible est *banale* si son support cuspidal est banal.

**Exemple 4.7.** — (1) Une représentation irréductible cuspidale  $\rho$  est banale si et seulement si  $e(\rho) \geq 2$ .

(2) Une représentation irréductible banale est cuspidale si et seulement si elle est supercuspidale (voir [11, Remarque 7.16]).

(3) Si la caractéristique  $\ell$  de  $R$  est banale pour  $G_m$ , c'est-à-dire si  $\ell$  est différente de  $p$  et ne divise aucun des entiers  $q^{di} - 1$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , où  $d$  désigne le degré réduit de  $D$  sur  $F$  et  $q$  le cardinal du corps résiduel de  $F$ , alors toute représentation irréductible de  $G_m$  est banale. Ceci est valable en particulier si  $R$  est de caractéristique nulle.

(4) Inversement, on suppose que la caractéristique  $\ell$  de  $R$  est non nulle, et soit  $m$  un entier tel que toute représentation irréductible de  $G_m$  soit banale. On note  $e$  l'ordre de  $q^d$  dans  $\mathbf{F}_\ell^\times$  et  $1_{D^\times}$  le caractère trivial de  $D^\times$ . Si  $e \leq m$ , alors la représentation  $\text{St}(1_{D^\times}, m)$  n'est pas banale (voir [11, Proposition 7.8]). On en déduit que  $e > m$ , c'est-à-dire que  $\ell$  est banale pour  $G_m$ .

Le corollaire suivant est immédiat après la proposition 4.5.

**Corollaire 4.8.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible banale. Alors le support cuspidal de  $\pi$  est égal à son support supercuspidal.

**Remarque 4.9.** — La réciproque n'est pas vraie. Si l'image de  $q$  dans  $R^\times$  est d'ordre 2, le caractère trivial de  $\text{GL}_2(F)$  n'est pas banal mais ses supports cuspidal et supercuspidal coïncident.

**4.5.** Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ , et soit  $\Delta = [a, b]_\rho$  un segment banal. On pose :

$$(4.1) \quad \Pi(\Delta) = \rho\nu_\rho^a \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b$$

et on note  $n$  la longueur de  $\Delta$ . La proposition suivante associe à  $\Delta$  deux représentations irréductibles de  $G_{mn}$ .

**Proposition 4.10.** — (1) L'induite  $\Pi(\Delta)$  possède une unique sous-représentation irréductible, notée  $Z(\Delta)$ . C'est l'unique représentation irréductible de  $G_{mn}$ , à isomorphisme près, telle que :

$$\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Z(\Delta)) = \rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b.$$

(2) L'induite  $\Pi(\Delta)$  possède un unique quotient irréductible, noté  $L(\Delta)$ . C'est l'unique représentation irréductible de  $G_{mn}$ , à isomorphisme près, telle que :

$$\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(L(\Delta)) = \rho\nu_\rho^b \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^a.$$

*Démonstration.* — Puisque  $\Delta$  est banal, tout élément de  $\text{supp}(\Delta)$  apparaît avec multiplicité 1. D'après la proposition 2.1, il existe une unique sous-représentation irréductible et un unique quotient irréductible dans  $\Pi(\Delta)$ . D'après la proposition 4.5, si le segment

$\Delta$  est de longueur  $\geq 2$ , l'induite  $\Pi(\Delta)$  ne contient pas de facteur cuspidal. La propriété sur le foncteur de Jacquet se prouve alors comme dans [17, §2] ou [13, Proposition 2.7]. Voir aussi [11, Lemme 7.26]  $\square$

**Remarque 4.11.** — On a  $L(\Delta^\vee) \simeq L(\Delta)^\vee$  et  $Z(\Delta^\vee) \simeq Z(\Delta)^\vee$ .

## 5. Classification des représentations banales

Dans cette section on classifie toutes les représentations banales en termes de multisegments banales.

**5.1.** Soit  $m \geq 1$  un entier, soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$  et soit  $\Delta = [a, b]_\rho$  un segment. Pour montrer les théorèmes 1.3 et 1.4, on notera indifféremment  $\langle \Delta \rangle = \langle a, b \rangle_\rho$  la représentation  $Z([a, b]_\rho)$  ou  $L([-b, -a]_\rho)$ , comme dans [11, §7.5.1].

Dans le cas où  $\langle \Delta \rangle$  désigne  $Z([a, b]_\rho)$  (respectivement  $L([-b, -a]_\rho)$ ) on note  $\mu_\rho$  le caractère  $\nu_\rho$  (respectivement  $\nu_\rho^{-1}$ ).

La proposition suivante résume la proposition 4.10 et montre l'intérêt de cette notation.

**Proposition 5.1.** — Soit  $[a, b]_\rho$  un segment banal et soit  $\pi$  une représentation irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) La représentation  $\pi$  est isomorphe à  $\langle \Delta \rangle$ .
- (2)  $\pi$  est l'unique sous-représentation irréductible de  $\rho\mu_\rho^a \times \rho\mu_\rho^{a+1} \times \cdots \times \rho\mu_\rho^b$ .
- (3) On a  $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\pi) = \rho\mu_\rho^a \otimes \rho\mu_\rho^{a+1} \otimes \cdots \otimes \rho\mu_\rho^b$ .

Le théorème suivant est un cas particulier de [11, Théorème 7.38]. On remarquera que, dans le cas banal, la preuve donnée dans [11] se simplifie notablement.

**Théorème 5.2.** — Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments banales. Si, pour tous  $1 \leq i, j \leq r$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  sont non liés, alors la représentation :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$$

est irréductible.

**5.2.** Le théorème suivant englobe les théorèmes 1.3 et 1.4.

**Théorème 5.3.** — (1) Soit  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  une forme rangée d'un multisegment banal  $\mathbf{m}$ . Alors  $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$  admet une unique sous-représentation irréductible, ne dépendant que de  $\mathbf{m}$  et notée :

$$\langle \mathbf{m} \rangle.$$

Elle est banale et sa multiplicité dans  $[\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle]$  est égale à 1.

(2) Soient  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  des multisegments banales. Alors  $\langle \mathbf{m} \rangle$  et  $\langle \mathbf{m}' \rangle$  sont isomorphes si et seulement si  $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ .

(3) Soit  $n \geq 1$ . Toute représentation irréductible banale de  $G_n$  est de la forme  $\langle \mathbf{m} \rangle$ , où  $\mathbf{m}$  est un multisegment banal de degré  $n$ .

**Remarque 5.4.** — Si  $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_r)$  est une autre forme rangée de  $\mathbf{m}$ , alors :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle \simeq \langle \Delta'_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_r \rangle$$

d'après le théorème 5.2.

Le reste de cette section sera consacré à la preuve de ce théorème.

**5.3.** Dans ce paragraphe on prouve la partie (1) du théorème 5.3. Soit  $\mathbf{m}$  un multisegment banal non nul. Il existe  $u \geq 1$  et des familles de multisegments  $(\Delta_1^{(i)}, \dots, \Delta_{n_i}^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq u$ , telles que :

$$(5.1) \quad (\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_{n_1}^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \dots, \Delta_{n_2}^{(2)}, \dots, \Delta_1^{(u)}, \dots, \Delta_{n_u}^{(u)})$$

soit une forme rangée de  $\mathbf{m}$  et que, pour tous  $1 \leq i \leq u$  et  $1 \leq j, k \leq n_i$ , on ait :

$$(5.2) \quad b(\Delta_j^{(i)}) = b(\Delta_k^{(i)}),$$

c'est-à-dire que  $\Delta_j^{(i)}$  et  $\Delta_k^{(i)}$  ont la même extrémité finale, que l'on désigne par  $\rho_i$ . Puisque le multisegment  $\mathbf{m}$  est banal, on peut même supposer que :

$$(5.3) \quad \rho_i \notin \Delta_k^{(j)}$$

pour tous  $1 \leq i < j \leq u$  et  $1 \leq k \leq n_j$  (c'est-à-dire que, pour  $1 \leq l \leq n_i$  et  $1 \leq k \leq n_j$ , le segment  $\Delta_l^{(i)}$  ne précède pas  $\Delta_k^{(j)}$ ). On note  $\alpha$  la partition :

$$\alpha = (\deg(\Delta_1^{(1)} + \dots + \Delta_{n_1}^{(1)}), \deg(\Delta_1^{(2)} + \dots + \Delta_{n_2}^{(2)}), \dots, \deg(\Delta_1^{(u)} + \dots + \Delta_{n_u}^{(u)}))$$

et on pose :

$$\pi_0 = \bigotimes_{i=1}^u (\langle \Delta_1^{(i)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_i}^{(i)} \rangle)$$

qui est une représentation irréductible (par le théorème 5.2) de  $M_\alpha$ .

**Lemme 5.5.** — La représentation  $\pi_0$  apparaît avec multiplicité 1 dans :

$$\mathbf{r}_\alpha(\langle \Delta_1^{(1)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1^{(u)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_u}^{(u)} \rangle).$$

*Démonstration.* — Par nos hypothèses (5.2), (5.3) et le lemme géométrique (voir le paragraphe 2.6), la représentations  $\pi_0$  satisfait aux conditions de la proposition 2.1. Le lemme est donc une conséquence directe de cette proposition.  $\square$

**Proposition 5.6.** — Avec les notations du lemme 5.5, on a :

(1) *La représentation :*

$$\langle \Delta_1^{(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1^{(u)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_u}^{(u)} \rangle$$

possède une unique sous-représentation irréductible ; sa multiplicité dans l'induite est 1.

(2) *La représentation :*

$$\langle \Delta_{n_u}^{(u)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1^{(u)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1^{(1)} \rangle$$

possède un unique quotient irréductible ; sa multiplicité dans l'induite est 1.

*Démonstration.* — Ceci se déduit du lemme 5.5 et de la proposition 2.1.  $\square$

Nous prouvons maintenant le point (1) du théorème 5.3. Soit  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  une forme rangée d'un multisegment banal  $\mathbf{m}$ . La famille (5.1) est une autre forme rangée de  $\mathbf{m}$ . Le résultat est une conséquence de la remarque 5.4 et de la proposition 5.6.

**Remarque 5.7.** — On déduit de même, par la proposition 5.6 (2), que la représentation induite  $\langle \Delta_r \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$  possède un unique quotient irréductible. Le module de Jacquet de ce quotient contient la représentation  $\pi_0$  du lemme 5.5 et il apparaît avec multiplicité 1 dans l'induite. Puisque, par le lemme 5.5, la représentation  $\langle \mathbf{m} \rangle$  est le seul sous-quotient de cette induite dont le module de Jacquet contienne  $\pi_0$ , on déduit que  $\langle \mathbf{m} \rangle$  est aussi le seul quotient irréductible de  $\langle \Delta_r \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ .

**5.4.** Si  $\mathbf{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$  est un multisegment banal, on note  $\mathbf{m}^\vee$  le multisegment :

$$\mathbf{m}^\vee = \Delta_1^\vee + \cdots + \Delta_r^\vee.$$

On a le résultat suivant.

**Proposition 5.8.** — *La représentation  $\langle \mathbf{m}^\vee \rangle$  est isomorphe à  $\langle \mathbf{m} \rangle^\vee$ .*

*Démonstration.* — On peut supposer que la famille  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  est une forme rangée de  $\mathbf{m}$ . D'après la remarque 5.7, la représentation  $\langle \mathbf{m} \rangle$  est la seule sous-représentation irréductible de la représentation induite  $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$  et le seul quotient irréductible de  $\langle \Delta_r \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ . Par passage à la contragrédiente, on en déduit que  $\langle \mathbf{m} \rangle^\vee$  est la seule sous-représentation irréductible de  $\langle \Delta_r^\vee \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1^\vee \rangle$  et le seul quotient irréductible de  $\langle \Delta_1^\vee \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r^\vee \rangle$ . Comme  $(\Delta_r^\vee, \dots, \Delta_1^\vee)$  est une forme rangée de  $\mathbf{m}^\vee$ , on a le résultat.  $\square$

**Proposition 5.9.** — *Soient  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_t$  des multisegments banals tels que, si  $i \neq j$ , aucun segment de  $\mathbf{m}_i$  ne soit lié à un segment de  $\mathbf{m}_j$ . Alors :*

$$\langle \mathbf{m}_1 \rangle \times \cdots \times \langle \mathbf{m}_t \rangle \simeq \langle \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_t \rangle.$$



*Démonstration.* — Par récurrence, on se ramène au cas où  $t = 2$ . Soient  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  et  $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$  des formes rangées de  $\mathfrak{m}_1$  et  $\mathfrak{m}_2$  respectivement. Puisqu'aucun segment de  $\mathfrak{m}_1$  n'est lié à un segment de  $\mathfrak{m}_2$ , la famille  $(\Delta_1 + \dots + \Delta_r + \Delta'_1 + \dots + \Delta'_{r'})$  est une forme rangée du multisegment *banal*  $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ . Ainsi la représentation :

$$(5.4) \quad \langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle$$

a, par le théorème 5.3(1) une unique sous-représentation irréductible et elle est isomorphe à la représentation  $\langle \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \rangle$ . Puisque  $\langle \mathfrak{m}_1 \rangle \times \langle \mathfrak{m}_2 \rangle$  est une sous-représentation de (5.4), on en déduit que  $\langle \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \rangle$  est l'unique sous-représentation irréductible de  $\langle \mathfrak{m}_1 \rangle \times \langle \mathfrak{m}_2 \rangle$ . De même, d'après la remarque 5.7, la représentation :

$$(5.5) \quad \langle \Delta_r \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta'_{r'} \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_1 \rangle$$

a un unique quotient irréductible isomorphe à  $\langle \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \rangle$ . Comme  $\langle \mathfrak{m}_1 \rangle \times \langle \mathfrak{m}_2 \rangle$  est un quotient de (5.5), on trouve que  $\langle \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \rangle$  est l'unique quotient irréductible de  $\langle \mathfrak{m}_1 \rangle \times \langle \mathfrak{m}_2 \rangle$ . Or, d'après le théorème 5.3, la représentation  $\langle \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \rangle$  apparaît avec multiplicité 1 dans (5.4). On en déduit que  $\langle \mathfrak{m}_1 \rangle \times \langle \mathfrak{m}_2 \rangle$  est isomorphe à  $\langle \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \rangle$ .  $\square$

Ce résultat permet de nous ramener au cas des multisegments banals de support fixé et connexe.

**5.5.** Comme au paragraphe 4.2, soit  $\mathfrak{s} \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$  connexe et banal et écrivons :

$$\text{supp}(\mathfrak{s}) = [\rho] + [\rho\mu_\rho] + \dots + [\rho\mu_\rho^t]$$

où  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$  et  $0 \leq t \leq e(\rho) - 1$ . Soit un multisegment  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}(\mathfrak{s})$  et soit  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  sa forme ordonnée. Pour chaque  $i$ , on écrit  $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$ . Alors, par le théorème 5.3 (1), on peut déduire facilement (par réciprocity de Frobenius) que :

$$(5.6) \quad \rho\mu_\rho^{a_1} \otimes \dots \otimes \rho\mu_\rho^{b_1} \otimes \rho\mu_\rho^{a_2} \otimes \dots \otimes \rho\mu_\rho^{b_2} \otimes \dots \otimes \rho\mu_\rho^{a_r} \otimes \dots \otimes \rho\mu_\rho^{b_r}$$

apparaît dans le module de Jacquet  $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle)$ .

Si  $\mathfrak{m}' = \Delta'_1 + \dots + \Delta'_{r'}$  est un multisegment de support  $\mathfrak{s}$  tel que  $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ , alors, d'après le lemme géométrique, la représentation (5.6) n'apparaît pas dans le module de Jacquet  $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\langle \Delta'_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle)$ . Par le théorème 5.3(1) et l'exactitude du foncteur de Jacquet, elle n'apparaît pas dans  $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle)$ , la représentation  $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle$  étant une sous-représentation de  $\langle \Delta'_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle$ . On en déduit que, si  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \text{Mult}(\mathfrak{s})$  et  $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$ , alors  $\langle \mathfrak{m} \rangle \not\cong \langle \mathfrak{m}' \rangle$ .

**5.6.** On prouve dans ce paragraphe la partie (2) du théorème 5.3. Soient  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  deux multisegments banals. On décompose  $\mathbf{m}$  sous la forme :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \cdots + \mathbf{m}_t$$

avec  $\mathbf{m}_i$  à support connexe pour tout  $1 \leq i \leq t$  et  $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j$  à supports disjoints si  $i \neq j$ . De même, on écrit  $\mathbf{m}' = \mathbf{m}'_1 + \mathbf{m}'_2 + \cdots + \mathbf{m}'_{t'}$ . Supposons que  $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}'$  et montrons que les représentations  $\langle \mathbf{m} \rangle$  et  $\langle \mathbf{m}' \rangle$  ne sont pas isomorphes. D'après la proposition 5.9, on peut supposer que  $\text{supp}(\mathbf{m}_1) = \text{supp}(\mathbf{m}'_1)$  et que  $\mathbf{m}_1 > \mathbf{m}'_1$ . Notons  $\mathbf{m}_1 = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$  avec  $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$  pour tout  $i$ , où  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ . De façon analogue, notons  $\mathbf{m}' = \Delta'_1 + \cdots + \Delta'_{r'}$ .

D'après la partie (1) du théorème 5.3, il existe une représentation  $\pi$  de la forme (5.6) et une représentation  $\pi' \in G_{n'}$ , avec  $n' = \deg(\mathbf{m}) - \deg(\mathbf{m}_1)$ , telles que la représentation  $\pi \otimes \pi'$  apparaisse dans  $\mathbf{r}_{(m, m, \dots, m, n')}(\langle \mathbf{m} \rangle)$ . Comme dans le paragraphe 5.5, par le lemme géométrique et l'hypothèse  $\mathbf{m}_1 > \mathbf{m}'_1$ , pour toute représentation irréductible  $\pi' \in G_{n'}$ , la représentation  $\pi \otimes \pi'$  n'apparaît pas dans  $\mathbf{r}_{(m, m, \dots, m, n')}(\langle \Delta'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle)$ . D'après la partie (1) du théorème 5.3 et par exactitude du foncteur de Jacquet, elle n'apparaît pas dans  $\mathbf{r}_{(m, m, \dots, m, n')}(\langle \mathbf{m}' \rangle)$ . On en déduit que  $\langle \mathbf{m} \rangle \not\cong \langle \mathbf{m}' \rangle$ .

**5.7.** Montrons maintenant la partie (3) du théorème 5.3. Soit  $\pi$  une représentation banale et soit  $\mathfrak{s}$  son support cuspidal. On note  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$  l'ensemble des représentations irréductibles de support cuspidal  $\mathfrak{s}$  et  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$  l'ensemble des multisegments de support  $\mathfrak{s}$ . Les ensembles  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$  et  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$  sont finis et, d'après le théorème 5.3 (2) qu'on vient de montrer, l'application  $\mathbf{m} \mapsto \langle \mathbf{m} \rangle$  est une injection de  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$  vers  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$ . On va prouver ici qu'elle est bijective.

Pour cela, il suffit de montrer que les ensembles  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$  et  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$  ont le même cardinal. On va prouver que l'application  $\mathbf{m} \mapsto Z(\mathbf{m})$  est surjective. La preuve est la même que celle de [17, 6.7] dans le cas  $D = F$  et  $R = \mathbf{C}$ . Il faut d'abord étudier le cas de deux segments.

**Lemme 5.10.** — *Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ , et soient deux segments banals liés  $[a, b]_\rho$  et  $[a', b']_\rho$  tels que le multisegment  $[a, b]_\rho + [a', b']_\rho$  soit banal.*

(1) *La représentation :*

$$(5.7) \quad Z([a, b]_\rho) \times Z([a', b']_\rho)$$

*est indécomposable de longueur 2.*

(2) *On suppose que  $[a, b]_\rho$  précède  $[a', b']_\rho$ . Alors l'unique sous-représentation irréductible de (5.7) est  $Z([a, b']_\rho) \times Z([a', b]_\rho)$  et son unique quotient irréductible est une sous-représentation de  $Z([a', b']_\rho) \times Z([a, b]_\rho)$ .*

*Démonstration.* — Le résultat est vrai dans le cas déployé, c'est-à-dire lorsque  $D$  est égale à  $F$  : l'argument de Zelevinski [17, Proposition 4.6] dans le cas complexe est encore valable. En effet, dans la preuve, on utilise trois outils qui sont valables dans notre cadre :

- la théorie des dérivées ;
- le fait que dans l'induite  $Z([a, b]_\rho) \times Z([a', b']_\rho)$  tous les facteurs ont le même support cuspidal (proposition 4.8) ;
- le cas où les supports de  $[a, b]_\rho$  et  $[a', b']_\rho$  sont disjoints (voir [17, §2]), qui s'étend ici comme on l'a vu dans le théorème 5.2.

Pour prouver le résultat dans le cas général, on applique la méthode du changement de groupe exposée dans [11, §5.4] (voir notamment *ibid.*, corollaire 5.34).  $\square$

Pour les représentations à la Langlands, voir la remarque 5.12.

**Remarque 5.11.** — Si le multisegment  $[a, b]_\rho + [a', b']_\rho$  n'est pas banal, alors l'induite :

$$Z([a, b]_\rho) \times Z([a', b']_\rho)$$

peut être de longueur strictement supérieure à 2.

Soit  $\pi$  une représentation irréductible banale de  $G_m$ , et soit  $\Phi(\pi)$  l'ensemble des familles de segments :

$$(5.8) \quad \vec{m} = (\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

tels que  $\pi$  soit une sous-représentation de  $Z(\Delta_1) \times \dots \times Z(\Delta_r)$ . Cet ensemble est non vide et fini. Appelons *inversion* de (5.8) un couple d'indices  $(i, j)$  tels que  $i < j$  et  $\Delta_i$  précède  $\Delta_j$ . On va prouver qu'il existe un élément  $\vec{m} \in \Phi(\pi)$  sans inversion. Soit  $\vec{m}$  dans  $\Phi(\pi)$  avec un nombre d'inversions minimal, qu'on écrit sous la forme (5.8). Pour chaque  $i$ , on pose  $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$ . Supposons que  $\vec{m}$  ait une inversion. Par le corollaire 5.13 (1), on peut bien supposer que cette inversion est de la forme  $(i, i+1)$ , c'est-à-dire que  $\Delta_i$  précède  $\Delta_{i+1}$ . D'après la proposition 5.10, l'induite  $Z(\Delta_i) \times Z(\Delta_{i+1})$  est composée de la représentation  $Z([a_{i+1}, b_i]_\rho) \times Z([a_i, b_{i+1}]_\rho)$  et d'une sous-représentation irréductible de  $Z(\Delta_{i+1}) \times Z(\Delta_i)$ . Ainsi :

- (1) ou bien  $\pi$  est une sous-représentation de  $Z(\Delta_1) \times \dots \times Z(\Delta_{i+1}) \times Z(\Delta_i) \times \dots \times Z(\Delta_r)$ ,
- (2) ou bien  $\pi$  est une sous-représentation de :

$$Z(\Delta_1) \times \dots \times Z([a_{i+1}, b_i]_\rho) \times Z([a_i, b_{i+1}]_\rho) \times \dots \times Z(\Delta_r)$$

et les deux familles  $(\Delta_1, \dots, \Delta_{i+1}, \Delta_i, \dots, \Delta_r)$  et  $(\Delta_1, \dots, [a_{i+1}, b_i]_\rho, [a_i, b_{i+1}]_\rho, \dots, \Delta_r)$  ont strictement moins d'inversions que  $\vec{m}$  d'après [17, Lemma 6.7].

Cela met fin à la preuve du théorème 5.3 et donc aussi aux théorèmes 1.3 et 1.4.

**Remarque 5.12.** — Si  $[a, b]_\rho$  et  $[a', b']_\rho$  sont deux segments banals liés et tels que le multisegment  $[a, b]_\rho + [a', b']_\rho$  soit également banal, alors  $L([a, b]_\rho) \times L([a', b']_\rho)$  est aussi de

longueur 2 indécomposable. Par exemple, la preuve de [13, Proposition 4.3] est valable ici en remplaçant le théorème du quotient de Langlands par le théorème 1.4.

**Corollaire 5.13.** — *Soit  $\Delta_1 + \dots + \Delta_r$  un multisegment banal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Pour tous  $1 \leq i, j \leq r$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  ne sont pas liés.*
- (2) *La représentation  $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Ce corollaire découle du théorème 5.2, du lemme 5.10 et de la remarque 5.12.  $\square$

**5.8.** On suppose dans ce paragraphe que  $R$  est le corps des nombres complexes. Si  $D$  est égale à  $F$ , les théorèmes 1.3 et 1.4 sont prouvés dans [17, Theorem 6.1] et [12, Théorème 3] respectivement. Dans le cas où  $D \neq F$ , le théorème 1.4 est prouvé dans [13, §2] lorsque la caractéristique de  $F$  est nulle et dans [3] lorsque la caractéristique de  $F$  est positive. Notre preuve est purement locale et ne s'appuie pas sur [10]. Le théorème de classification 1.3 est aussi nouveau dans ce cas. Les résultats qui précèdent fournissent aussi, *a posteriori*, une nouvelle preuve du résultat suivant, dû à [10, B.2.d] et [4, Théorème 1.1].

**Théorème 5.14.** — *Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux représentations irréductibles de carré intégrable, alors l'induite  $\sigma \times \sigma'$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Comme dans le cas où  $D$  est égale à  $F$  (la preuve non publiée de Bernstein s'étend au cas où  $D \neq F$ , voir [2] ou [3] pour plus de détails), il existe des segments centrés  $\Delta$  et  $\Delta'$  tels que  $\sigma = L(\Delta)$  et  $\sigma' = L(\Delta')$ . Étant centrés,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas liés et le résultat découle maintenant du théorème 5.2.  $\square$

## 6. Relèvement d'une représentation banale

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . On note  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  une clôture algébrique du corps  $\mathbf{Q}_\ell$  des nombres  $\ell$ -adiques,  $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$  son anneau d'entiers et  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$  son corps résiduel. Dans cette section, on montre que toute  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible banale admet un relèvement à  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ .

**6.1.** Soit un entier  $m \geq 1$ . Une représentation de  $G_m$  sur un  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -espace vectoriel  $V$  est dite *entière* si elle est admissible et si elle admet une *structure entière*, c'est-à-dire un sous- $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ -module de  $V$  stable par  $G_m$  et engendré par une base de  $V$  sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ .

Une  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation cuspidale est entière si, et seulement si, son caractère central est à valeurs dans  $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ . Une  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation irréductible est entière si, et seulement si, son support cuspidal est formé de  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations cuspidales entières.

Si  $\pi$  est une représentation irréductible entière de  $G_m$  sur un  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -espace vectoriel  $V$ , alors, d'après [16, Theorem 1], toutes ses structures entières sont de type fini comme  $\overline{\mathbf{Z}}_\ell G$ -module. Si  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $\pi$ , la représentation de  $G_m$  sur le  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -espace vectoriel  $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$  est de longueur finie et sa semi-simplification ne dépend pas du choix de la structure entière d'après [14, II.5.11]. On note  $\mathbf{r}_\ell(\pi)$  cette semi-simplification, qu'on appelle *réduction* de  $\pi$  et qui ne dépend que de sa classe d'isomorphisme  $[\pi]$ . Par linéarité, on en déduit un homomorphisme de groupes :

$$(6.1) \quad \mathbf{r}_\ell : \mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}^{\text{ent}}(G_m) \rightarrow \mathcal{G}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G_m),$$

où  $\mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}^{\text{ent}}(G_m)$  désigne le sous-groupe de  $\mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(G_m)$  engendré par l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles entières de  $G_m$ .

On appelle *relèvement* d'une  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible  $\pi$  de  $G_m$  une  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation entière  $\tilde{\pi}$  de  $G_m$  telle que  $[\pi] = \mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi})$ . Si un tel relèvement existe, on dit que  $\pi$  se relève.

**6.2.** Soit un entier  $m \geq 1$ . Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 6.1.** — *Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible banale de  $G_m$ . Alors  $\pi$  admet un relèvement.*

Remarquons que, pour les représentations cuspidales banales, le théorème 6.1 est donné par la conjonction de [11, Théorème 7.14], qui implique qu'une représentation irréductible cuspidale non supercuspidale n'est pas banale, et de [11, Théorème 4.24].

**6.2.1.** On étend d'abord les définitions des opérateurs d'entrelacement de [13, §5] au cas des représentations banales. On reprend les notations du paragraphe 5.1. Soient  $\mathbf{m}$  un multisegment banal et  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  une forme rangée de  $\mathbf{m}$ . On note  $I(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  la représentation induite  $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$ .

**Définition 6.2.** — On note :

$$\mathcal{J}_{\mathbf{m}} : I(\Delta_r, \dots, \Delta_1) \rightarrow I(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

l'opérateur défini comme la composée :

$$I(\Delta_r, \dots, \Delta_1) \xrightarrow{\alpha} \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle \xrightarrow{\beta} I(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement la projection et l'inclusion définies par la remarque 5.7 et le théorème 5.3.

**Remarque 6.3.** — L'opérateur  $\mathcal{J}_{\mathbf{m}}$  est un isomorphisme si et seulement si, pour tous entiers  $1 \leq i, j \leq r$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  ne sont pas liés.

**Définition 6.4.** — On note :

$$\mathcal{J}'_{\mathbf{m}} : \mathrm{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_1) \rightarrow \mathrm{I}(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

l'opérateur défini comme la composée :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_3, \Delta_2, \Delta_1) &\xrightarrow{\mathrm{id} \times \dots \times \mathrm{id} \times \mathcal{J}_{(\Delta_1, \Delta_2)}} \mathrm{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_3, \Delta_1, \Delta_2) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \times \dots \times \mathcal{J}_{(\Delta_1, \Delta_3)} \times \mathrm{id}} \mathrm{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2) \\ &\quad \vdots \\ &\xrightarrow{\mathcal{J}_{(\Delta_1, \Delta_r)} \times \mathrm{id} \times \dots \times \mathrm{id}} \mathrm{I}(\Delta_1, \Delta_r, \dots, \Delta_3, \Delta_2) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \times \dots \times \mathrm{id} \times \mathcal{J}_{(\Delta_2, \Delta_3)}} \mathrm{I}(\Delta_1, \Delta_r, \dots, \Delta_2, \Delta_3) \\ &\quad \vdots \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \times \dots \times \mathcal{J}_{(\Delta_{r-1}, \Delta_r)}} \mathrm{I}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_r) \end{aligned}$$

où, pour tous segments  $\Delta, \Delta'$ , l'opérateur  $\mathcal{J}_{(\Delta, \Delta')}$  est défini par la définition 6.2.

**Lemme 6.5.** — Pour tout multisegment banal  $\mathbf{m}$ , on a  $\mathcal{J}'_{\mathbf{m}} = \mathcal{J}_{\mathbf{m}}$ .

*Démonstration.* — La preuve de [13, Lemma 5.1] est encore valable ici.  $\square$

**6.2.2.** Soit  $\rho$  une  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G_m$  et soit  $\tilde{\rho}$  un relèvement de  $\rho$ . Pour tout segment banal  $\Delta = [a, b]_\rho$ , on pose  $\tilde{\Delta} = [a, b]_{\tilde{\rho}}$ .

**Proposition 6.6.** — La  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation  $\langle \tilde{\Delta} \rangle$  est entière et on a :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta} \rangle) = \langle \Delta \rangle.$$

*Démonstration.* — La représentation  $\langle \tilde{\Delta} \rangle$  est entière d'après le paragraphe 6.1 et la proposition 4.10. Comme  $\Delta$  est banal,  $\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta} \rangle)$  ne contient pas de représentation de support cuspidal différent du support de  $\Delta$  d'après la proposition 4.5. Puisque la réduction modulo  $\ell$  commute au foncteur de Jacquet,  $\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta} \rangle)$  est une  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation dont le module de Jacquet relativement à la partition  $(m, \dots, m)$  est isomorphe à :

$$\mu_\rho^a \rho \otimes \mu_\rho^{a+1} \rho \otimes \dots \otimes \mu_\rho^b \rho.$$

La proposition découle alors de la proposition 5.1.  $\square$

Dans le cas général (c'est-à-dire pour un segment qui n'est pas nécessairement banal), voir [11, §9.7].

**Proposition 6.7.** — Soient  $\Delta_1 = [a, b]_\rho$  et  $\Delta_2 = [a', b']_\rho$  deux segments banals liés avec  $1 \leq a + 1 \leq a' \leq b + 1 \leq b' \leq e(\rho) - 1$ . Alors  $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$  est entière et on a :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle) = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle.$$

Remarquons que la condition  $1 \leq a + 1 \leq a' \leq b + 1 \leq b' \leq e(\rho) - 1$  équivaut à dire que  $\Delta_1$  précède  $\Delta_2$  et que  $\tilde{\Delta}_1$  précède  $\tilde{\Delta}_2$ .

*Démonstration.* — La  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation  $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$  est entière d'après le paragraphe 6.1. Comme le foncteur d'induction parabolique commute à la réduction,  $\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle \times \langle \tilde{\Delta}_2 \rangle)$  est isomorphe à la semi-simplifiée de  $\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle$ , c'est-à-dire, par la proposition 5.10, à :

$$\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle \oplus \left( \langle a, b' \rangle_\rho \times \langle a', b \rangle_\rho \right).$$

Puisque, d'un autre côté, par la proposition 5.10, la représentation  $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle \times \langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$  est composée des représentations  $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$  et  $\langle a, b' \rangle_{\tilde{\rho}} \times \langle a', b \rangle_{\tilde{\rho}}$ , on a :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle \times \langle \tilde{\Delta}_2 \rangle) = \mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle) + \mathbf{r}_\ell(\langle a, b' \rangle_{\tilde{\rho}} \times \langle a', b \rangle_{\tilde{\rho}})$$

et, par la proposition 6.6 et le théorème 5.2 :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle a, b' \rangle_{\tilde{\rho}} \times \langle a', b \rangle_{\tilde{\rho}}) = \langle a, b' \rangle_\rho \times \langle a', b \rangle_\rho$$

et donc on trouve :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle) = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle,$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

**6.2.3.** Voyons maintenant que l'opérateur  $\mathcal{J}_m$  défini à la définition 6.2 se réduit bien modulo  $\ell$ .

**Proposition 6.8.** — Soient  $\Delta_1 = [a, b]_\rho$  et  $\Delta_2 = [a', b']_\rho$  deux segments banals liés avec  $1 \leq a + 1 \leq a' \leq b + 1 \leq b' \leq e(\rho) - 1$ . Notons  $\mathfrak{l}_1$  et  $\mathfrak{l}_2$  deux structures entières dans  $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$  et  $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$  respectivement. Alors il existe  $\mathfrak{l}'_1$  et  $\mathfrak{l}'_2$  deux structures entières dans  $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$  et  $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$  respectivement telles qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_1 & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2)}|_{\mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_1}} & \mathfrak{l}'_2 \times \mathfrak{l}'_1 \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \langle \Delta_2 \rangle \times \langle \Delta_1 \rangle & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\Delta_1, \Delta_2)}} & \langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \end{array}$$

où  $\otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$  désigne le foncteur d'extension des scalaires de  $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$  à  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ .

*Démonstration.* — Notons  $\alpha$  la projection de  $\langle \Delta_2 \rangle \times \langle \Delta_1 \rangle$  sur  $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$  définie par la remarque 5.7 et  $\beta$  le morphisme injectif de  $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$  dans  $\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle$  défini par le théorème 5.3. On définit  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  de façon analogue. D'après [14, I.9.3], l'image de  $\mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_1$  par  $\tilde{\alpha}$  est une structure entière dans  $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$ , notée  $\mathfrak{l}$ . D'après la proposition 6.7, les  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentations  $\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$  et  $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$  sont isomorphes. On note  $m$  le degré de  $\Delta_1 + \Delta_2$  et on pose  $G = G_m$ .

D'après [14, II.4.7] (voir aussi la preuve du lemme 6.11 dans [8]), il existe une extension finie  $E/\mathbf{Q}_\ell$  telle que les  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations  $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$ ,  $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$  et  $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$  admettent des modèles



sur  $E$ , notés respectivement  $\pi_1^E, \pi_2^E$  et  $\pi^E$ . On peut supposer que  $\mathfrak{l}$  est de la forme  $\overline{\mathbf{Z}}_\ell \otimes \mathbf{v}'$  où  $\mathbf{v}'$  est une  $\mathcal{O}_E$ -structure entière de  $\pi^E$ . Soient  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  deux  $\mathcal{O}_E$ -structures entières quelconques de  $\pi_1^E$  et  $\pi_2^E$  respectivement. Par [14, I.9.3], l'image réciproque  $\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$  est une  $\mathcal{O}_E$ -structure entière  $\mathbf{v}$  de  $\pi^E$ . Puisque  $\mathbf{v}'$  et  $\mathbf{v}$  sont de type fini en tant que  $\mathcal{O}_E G$ -modules, il existe une constante  $a \in E$  telle que  $\mathbf{v}' \subseteq a\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}' \not\subseteq a\mathfrak{p}_E \mathbf{v}$ . Soient  $\mathfrak{l}'_1 = \overline{\mathbf{Z}}_\ell \otimes a\mathbf{v}_1$  et  $\mathfrak{l}'_2 = \overline{\mathbf{Z}}_\ell \otimes a\mathbf{v}_2$ . Ce sont des structures entières dans  $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$  et  $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$  respectivement. Par construction, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l} & \xrightarrow{\tilde{\beta}|_{\mathfrak{l}}} & \mathfrak{l}'_1 \times \mathfrak{l}'_2 \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle & \xrightarrow{\beta} & \langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \end{array}$$

est commutatif, ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

**6.2.4.** Soit  $\mathfrak{s} \in N(\mathcal{C}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell})$  un support connexe banal et supposons que :

$$\text{supp}(\mathfrak{s}) = [\rho] + [\rho\mu_\rho] + \cdots + [\rho\mu_\rho^t], \quad 0 \leq t \leq e(\rho) - 1.$$

Soient  $\mathbf{m} \in \text{Mult}(\mathfrak{s})$  un multisegment banal et  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  une forme rangée de  $\mathbf{m}$ . Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on pose  $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$  avec  $0 \leq a_i \leq b_i \leq t$ . Pour chaque entier  $i$ , on pose  $\tilde{\Delta}_i = [a_i, b_i]_{\tilde{\rho}}$ , puis on pose  $\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\Delta}_1 + \cdots + \tilde{\Delta}_r$ . La condition  $0 \leq a_i \leq b_i \leq t$  assure que, pour tous  $1 \leq i, j \leq r$ , on a :

$$\tilde{\Delta}_i \text{ précède } \tilde{\Delta}_j \text{ si et seulement si } \Delta_i \text{ précède } \Delta_j.$$

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 6.9.** — Avec les notations précédentes, pour  $1 \leq i \leq r$ , soit  $\mathfrak{l}_i$  une structure entière dans  $\langle \tilde{\Delta}_i \rangle$ . Alors il existe, pour tout  $1 \leq i \leq r$ , une structure entière  $\mathfrak{l}'_i$  dans  $\langle \tilde{\Delta}_i \rangle$  telle qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \cdots \times \mathfrak{l}_1 & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\tilde{\mathbf{m}}}|_{\mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \cdots \times \mathfrak{l}_1}} & \mathfrak{l}'_1 \times \cdots \times \mathfrak{l}'_{r-1} \times \mathfrak{l}'_r \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ I(\Delta_r, \dots, \Delta_1) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\mathbf{m}}} & I(\Delta_1, \dots, \Delta_r) \end{array}$$

où  $\otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$  désigne le foncteur d'extension des scalaires de  $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$  à  $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ .

*Démonstration.* — D'après le lemme 6.5 et la proposition 6.8, il ne nous reste à voir que, si  $\Delta, \Delta'$  sont deux segments banals non liés et  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{l}'$  sont deux structures entières dans

$\langle \tilde{\Delta} \rangle$  et  $\langle \tilde{\Delta}' \rangle$  respectivement, alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l} \times \mathfrak{l}' & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}')|_{\mathfrak{l} \times \mathfrak{l}'}}} & \mathfrak{l}' \times \mathfrak{l} \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\Delta, \Delta')}} & \langle \Delta' \rangle \times \langle \Delta \rangle \end{array}$$

est toujours commutatif. Or, les flèches horizontales étant, par le théorème 5.2, des isomorphismes, le résultat est clair.  $\square$

**6.2.5.** On prouve maintenant le théorème 6.1. Par la proposition 5.9, on se ramène au cas où la représentation  $\pi$  est de support cuspidal  $\mathfrak{s}$  connexe. On peut maintenant appliquer le corollaire 6.9. Soit  $\mathbf{m} \in \text{Mult}(\mathfrak{s})$  un multisegment banal tel que  $\pi = \langle \mathbf{m} \rangle$  et soit  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  une forme rangée de  $\mathbf{m}$ . On définit  $\tilde{\mathbf{m}}$  comme dans 6.2.4. Pour  $1 \leq i \leq r$ , soient  $\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}'_i$  des structures entières dans  $\langle \tilde{\Delta}_i \rangle$  telles qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \dots \times \mathfrak{l}_1 & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\tilde{\mathbf{m}}|_{\mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \dots \times \mathfrak{l}_1}}} & \mathfrak{l}'_1 \times \dots \times \mathfrak{l}'_{r-1} \times \mathfrak{l}'_r \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \mathbf{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_1) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\mathbf{m}}} & \mathbf{I}(\Delta_1, \dots, \Delta_r). \end{array}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{J}_{\mathbf{m}}((\mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \dots \times \mathfrak{l}_1) \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell) \simeq \mathcal{J}_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_1)) \simeq \pi.$$

D'un autre côté, l'image de  $\mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \dots \times \mathfrak{l}_1$  par  $\mathcal{J}_{\tilde{\mathbf{m}}}$  est une structure entière  $\mathfrak{l}$  de la représentation  $\tilde{\pi} = \langle \tilde{\mathbf{m}} \rangle$  par le lemme 6.5, et donc la commutativité du diagramme implique que :

$$\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \simeq \pi,$$

c'est-à-dire  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}) = [\pi]$ , ce qui achève la preuve du théorème.

**Remarque 6.10.** — Ainsi, pour relever une représentation irréductible banale  $\pi$  de la forme  $\langle \mathbf{m} \rangle$  pour un multisegment  $\mathbf{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$  en une représentation  $\tilde{\pi}$  de la forme  $\langle \tilde{\mathbf{m}} \rangle$  pour un multisegment  $\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\Delta}_1 + \dots + \tilde{\Delta}_r$ , il suffit que les segments  $\tilde{\Delta}_i$  soient des relèvements des segments  $\Delta_i$  tels que, pour tous  $1 \leq i, j \leq r$ , on ait :

$$\tilde{\Delta}_i \text{ précède } \tilde{\Delta}_j \text{ si et seulement si } \Delta_i \text{ précède } \Delta_j.$$

L'hypothèse de banalité sur  $\pi$  nous assure qu'un tel choix des  $\tilde{\Delta}_i$  est possible.

## Références

- [1] S. ARIKI – *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, University Lecture Series, vol. 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [2] A. N. AUÉL – *Une démonstration d'un théorème de Bernstein sur les représentations de quasi carré intégrable de  $GL_n(F)$  où  $F$  est un corps local non archimédien*, Mémoire de DEA, Université Paris Sud, 2004.
- [3] A. I. BADULESCU, G. HENNIART, B. LEMAIRE & V. SÉCHERRE – “Sur le dual unitaire de  $GL_r(D)$ ”, *Amer. J. Math.* **132** (2010), no. 5, p. 1365–1396.
- [4] A. I. BADULESCU – “Un résultat d'irréductibilité en caractéristique non nulle”, *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), no. 4, p. 583–592.
- [5] I. N. BERNSTEIN & A. V. ZELEVINSKY – “Representations of the group  $GL(n, F)$ , where  $F$  is a local non-Archimedean field”, *Uspehi Mat. Nauk* **31** (1976), no. 3(189), p. 5–70.
- [6] ———, “Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. I”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), no. 4, p. 441–472.
- [7] N. CHRISS & V. GINZBURG – *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.
- [8] ———, “ $\nu$ -tempered representations of  $p$ -adic groups, I:  $l$ -adic case”, *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 3, p. 397–469.
- [9] J.-F. DAT – “Finitude pour les représentations lisses de groupes  $p$ -adiques”, *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 2, p. 261–333.
- [10] P. DELIGNE, D. KAZHDAN & M.-F. VIGNÉRAS – “Représentations des algèbres centrales simples  $p$ -adiques”, in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, p. 33–117.
- [11] A. MÍNGUEZ & V. SÉCHERRE – “Représentations lisses modulo  $\ell$  de  $GL_m(D)$ ”, Prépublication [arXiv:1110.1467](https://arxiv.org/abs/1110.1467).
- [12] F. RODIER – “Représentations de  $GL(n, k)$  où  $k$  est un corps  $p$ -adique”, in *Bourbaki Seminar, Vol. 1981/1982*, Astérisque, vol. 92, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 201–218.
- [13] M. TADIĆ – “Induced representations of  $GL(n, A)$  for  $p$ -adic division algebras  $A$ ”, *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), p. 48–77.
- [14] M.-F. VIGNÉRAS – *Représentations  $l$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [15] ———, “Irreducible modular representations of a reductive  $p$ -adic group and simple modules for Hecke algebras”, in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 117–133.
- [16] ———, “On highest Whittaker models and integral structures, in *Contributions to Automorphic forms, Geometry and Number theory: Shalika fest 2002*, John Hopkins Univ. Press, 2004, p. 773–801.
- [17] A. V. ZELEVINSKY – “Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. II. On irreducible representations of  $GL(n)$ ”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), no. 2, p. 165–210.

- *E-mail* : `minguez@math.jussieu.fr`

VINCENT SÉCHERRE, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France

*E-mail* : `vincent.secherre@math.uvsq.fr`